

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

**«Дальневосточный федеральный университет»**

**(ДВФУ)**

|  |
| --- |
| **ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**  **Департамент математического и компьютерного моделирования** |

**О Т Ч Е Т**

к лабораторной работе №1 по дисциплине

«Математическое моделирование»

направление подготовки

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Выполнил студент  гр. Б9121-01.03.02мкт  Домашев С.А. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  *(Ф.И.О.) (подпись)*  Проверил  профессор  Пермяков М.С. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ |
|  |  | *(Ф.И.О.) (подпись)*  « 18 » мая 2024г. |
|  |  |  |

г. Владивосток

2024

**Оглавление**

[Введение 3](#_Toc170043311)

[Создание математической модели 4](#_Toc170043312)

[1. Модель SIR 4](#_Toc170043313)

[2. Модель SEIR 6](#_Toc170043314)

[3. Модель SEIRV 8](#_Toc170043315)

[Анализ модели 11](#_Toc170043316)

[Численное решение 11](#_Toc170043317)

[Тесты 11](#_Toc170043318)

[Заключение 14](#_Toc170043319)

[Приложение 15](#_Toc170043320)

Введение

Эпидемии инфекционных заболеваний представляют серьезную угрозу для здоровья населения и требуют эффективных мер контроля и предотвращения. Математическое моделирование позволяет анализировать распространение инфекций, предсказывать будущие вспышки и оценивать влияние различных стратегий вмешательства. В данной лабораторной работе была построена, проанализирована и реализована усложненная модель SEIRV, которая включает категории вакцинированных. Также учтены демографические факторы, такие как рождаемость и смертность.

Создание математической модели

1. Модель SIR

Модель SIR состоит из трех основных компонентов:

* **S (восприимчивые)**: количество людей, которые могут быть инфицированы.
* **I (инфицированные)**: количество людей, которые в настоящее время инфицированы и могут передавать инфекцию другим.
* **R (выздоровевшие)**: количество людей, которые выздоровели и больше не могут быть инфицированы или передавать инфекцию.

Динамика изменения численности этих групп описывается следующими дифференциальными уравнениями:

где:

* β— коэффициент передачи инфекции,
* γ— коэффициент выздоровления.

Начальные условия для этих уравнений определяются исходным количеством восприимчивых, инфицированных и выздоровевших индивидов в популяции.

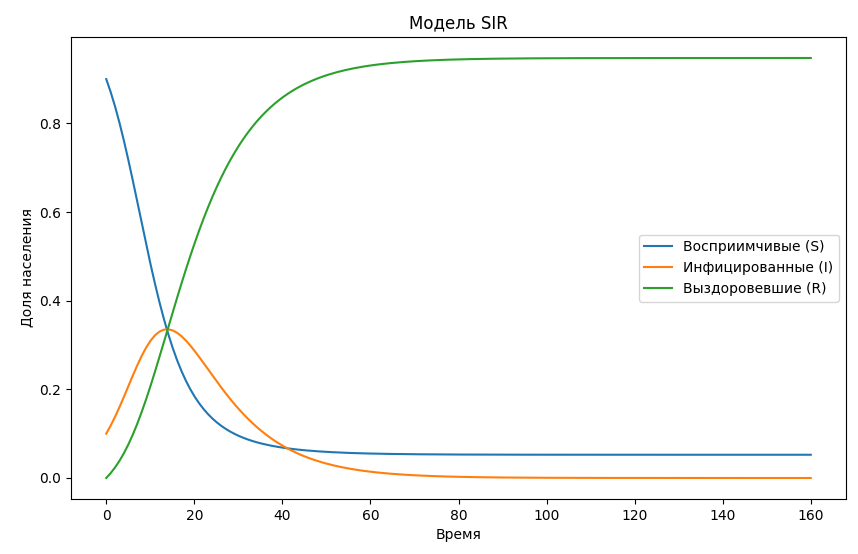


График 1 – модель SIR

1. Модель SEIR

Данная модель берёт за основу модель SIR и дополняет её.

Модель SEIR состоит из четырех основных компонентов:

* **S (восприимчивые)**: количество людей, которые могут быть инфицированы.
* **E (экспонированные)**: количество людей, которые инфицированы, но еще не являются заразными.
* **I (инфицированные)**: количество людей, которые в настоящее время инфицированы и могут передавать инфекцию другим.
* **R (выздоровевшие)**: количество людей, которые выздоровели и больше не могут быть инфицированы или передавать инфекцию.

Динамика изменения численности этих групп описывается следующими дифференциальными уравнениями:

σ - коэффициент перехода из состояния экспонированных в состояние инфицированных.

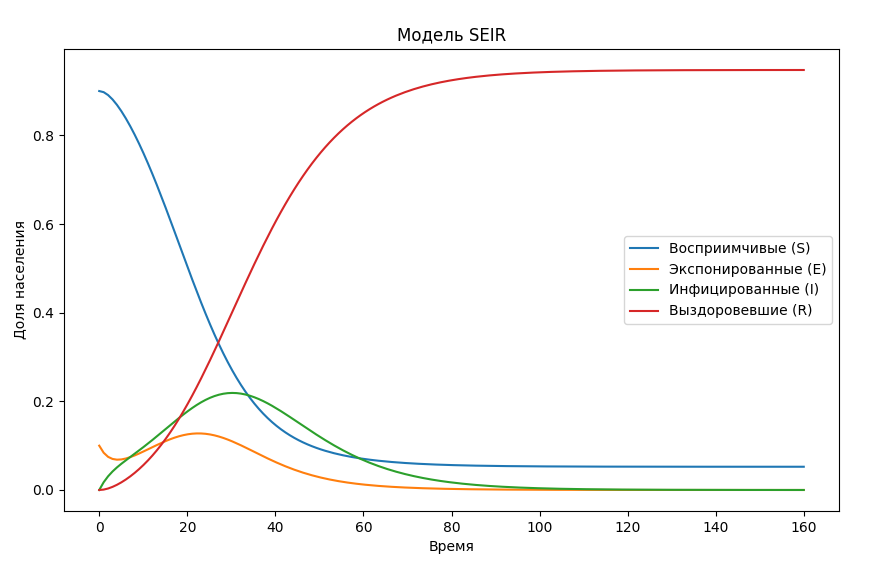


График 2 - модель SEIR

1. Модель SEIRV

Модель SEIRV берёт за основу модель SEIR и дополняет её.

Модель SEIRV состоит из следующих компонентов:

* **S (восприимчивые)**: количество людей, которые могут быть инфицированы.
* **E (экспонированные)**: количество людей, которые инфицированы, но еще не являются заразными.
* **I (инфицированные)**: количество людей, которые в настоящее время инфицированы и могут передавать инфекцию другим.
* **R (выздоровевшие)**: количество людей, которые выздоровели и больше не могут быть инфицированы, но имеют возможность рецидива.
* **V (вакцинированные)**: количество людей, которые вакцинированы и имеют некоторую защиту от инфекции.
* **Естественная смертность**: модель также учитывает естественную смертность всех групп населения

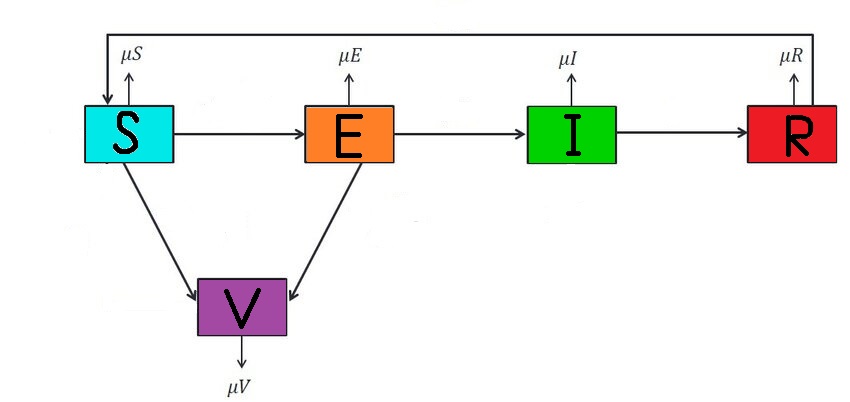


Схема 1 – визуализация переходов между состояниями

Динамика изменения численности этих групп описывается следующими дифференциальными уравнениями:

Опишем каждое уравнение подробнее:

* **Уравнение для восприимчивых (S):**

Где:

* : рождаемость (восприимчивые новорожденные).
* : инфекция восприимчивых (переход из S в E).
* : вакцинация восприимчивых (переход из S в V).
* : естественная смертность восприимчивых.
* : потеря иммунитета (переход из R в S).
* **Уравнение для экспонированных (E):**

Где:

* : инфекция восприимчивых (переход из S в E).
* : переход из подверженных в инфицированные.
* : естественная смертность подверженных.
* **Уравнение для инфицированных (I)**:

Где:

* : переход из подверженных в инфицированные.
* : выздоровление инфицированных (переход из I в R).
* : естественная смертность инфицированных.
* **Уравнение для выздоровевших (R)**:

Где:

* : выздоровление инфицированных (переход из I в R).
* : потеря иммунитета (переход из R в S).
* : естественная смертность выздоровевших.
* **Уравнение для вакцинированных (V)**:

Где:

* : вакцинация восприимчивых (переход из S в V).
* : естественная смертность вакцинированных.

**Общая численность популяции (N)** определяется суммой всех категорий:

Анализ модели

Математическая модель SEIRV представляется системой обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей динамику каждой из категорий населения. Для анализа существования и единственности решения используется метод Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Если начальные условия заданы, и функции, описывающие темпы изменений, непрерывны и удовлетворяют условию Липшица, то система имеет единственное решение.

Численное решение

Модель была реализована на языке программирования Python. Система дифференциальных уравнений решалась с помощью функции odeint. Эта функция использует алгоритмы на основе методов Адамса и Backward Differentiation Formula (BDF). Визуализация при наиболее часто встречающихся параметрах:

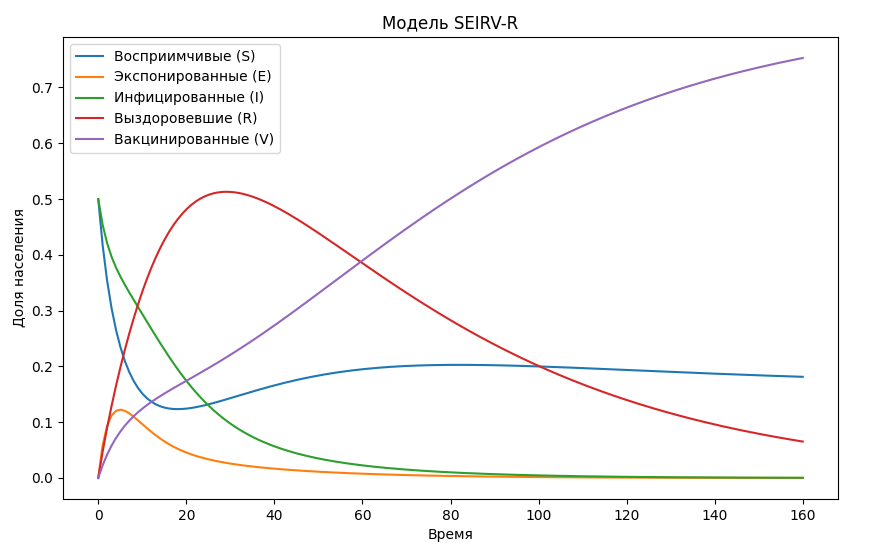


График 3 – модель SEIRV

Тесты

Для тестирования модели проводятся эксперименты с различными значениями параметров и начальных условий. Например, варьируются значения коэффициента вакцинации и заражения для анализа их влияния на распространение заболевания.

При выставлении больших параметров коэффициентов заражения, потери иммунитета и долгого выздоровления можно результат, в котором за 160 дней значительная доля населения остаётся заражённой:

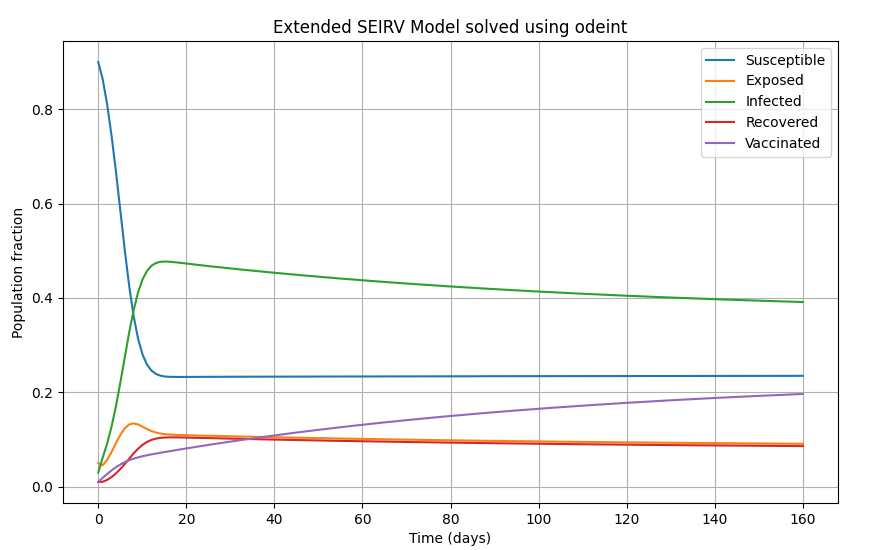


График 4 – Модель SEIRV

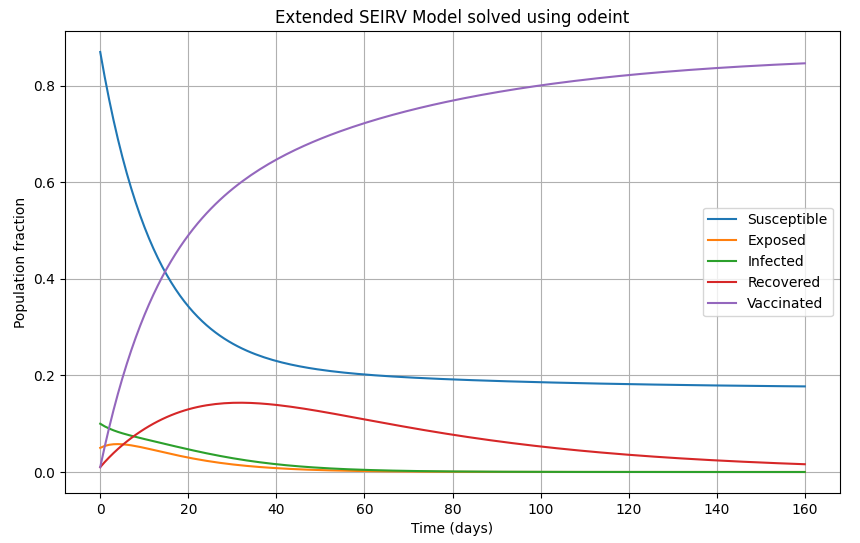
Модель подразумевает что человек, попавший в группу выздоровевших может попасть обратно в группу восприимчивых. Однако вакцинированный получает иммунитет навсегда, поэтому в большинстве ситуаций к 160 – ому дню почти всё население будет вакцинировано (Пример поведения модели со средними параметрами):

График 5 - Модель SEIRV

Заключение

Математическое моделирование распространения инфекционных заболеваний позволяет глубже понять динамику эпидемий и оценить эффективность различных мер по их контролю. В данной работе была рассмотрена и реализована усложненная модель SEIRV, которая включает категории вакцинированных и возможность повторного заражения выздоровевших.

Приложение

